# ESSEC 1983

Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales

MATHEMATIQUES - 1ère épreuve - option économique

I. On considère le système :

$$\begin{cases} x + b + c + d = 0 \\ x^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0 \\ x^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0 \\ x^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 0 \end{cases}.$$

1) Résoudre ce système d'équations où x est l'inconnue (complexe) et b, c, d trois nombres complexes non nuls et deux à deux distincts.

2) Résoudre ce système, considéré comme système d'équations à quatre inconnues (complexes).

II. Soit E(x) la partie entière de x donc le plus grand des entiers relatifs, inférieur ou égal à x.
On désigne par f l'application définie par $f(x) = 2x - E(2x)$.

1) Montrer que f est périodique.

2) On pose $g(x) = f(x + \frac{1}{6})$ et on désigne par F et G les graphes (courbes représentatives) de f et g.
Quelle transformation géométrique simple permet de déduire G de F ?

3) Soit $\varphi$ la restriction de f à [0,1] et $\Phi$ son graphe et soit

$\hat{\varphi}$ la restriction de g à $[0,1] - \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ et $\hat{\Phi}$ son graphe.

Montrer que l'un de ces deux graphes présente un centre de symétrie.

4) Calculer :

$$I = \int_0^1 \left(2x + \frac{1}{3} - E(2x + \frac{1}{3})\right)\left(3x + \frac{1}{2} - E(3x + \frac{1}{2})\right) dx.$$



III. Soit $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ .

1) En donner au voisinage de 0 un développement en x limité au second ordre.

2) On pose $a_n = \sum_{k=1}^{3} \frac{\cos(3(n+\frac{1}{2})+k)\frac{2\pi}{3}}{\sqrt{3n+k}}$ pour $n \in \mathbb{N}$ .

Quelle est la nature de la série de terme général $a_n (1 < n)$ ?

IV. Soit S l'ensemble des racines complexes de $x^7 - 1 = 0$ donc S est l'ensemble de sept racines septièmes de l'unité.

1) A chaque $\alpha \in S$ on associe le trinôme $x^2 + \alpha x + \alpha^2$. On obtient ainsi sept trinômes. On désigne par B(x) leur produit donc

$$B(x) = \prod_{\alpha \in S} (x^2 + \alpha x + \alpha^2).$$

a) Montrer que l'application $\alpha \mapsto \alpha^3$ est une bijection de S .

b) Soit $\beta \in S$ .

1) Montrer que l'application $\alpha \mapsto \alpha/\beta$ est une bijection de S.

2) Sachant que $\beta^2 x^2 + \alpha\beta x + \alpha^2 = \beta^2(x^2 + (\alpha/\beta)x + \alpha^2/\beta^2)$, comparer B(x) et B(βx).

3) Calculer B(x).

2) On pose $\frac{A(x)}{B(x)} = \sum_{\alpha \in S} \frac{\alpha^3}{x^2 + \alpha x + \alpha^2}$ .

a) Montrer que $A(x) = kA(\beta x)$ .

b) Expliciter $k \in S$.

c) Montrer que A(x) est réduit à la somme de deux termes $px^n + qx^{n+7}$ et préciser n

d) En mettant $\frac{A(x)}{B(x)}$ sous la forme :

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{1}{x^2+x+1} + \sum_{\alpha \in S-\{1\}} \frac{\alpha^3}{x^2 + \alpha x + \alpha^2},$$

préciser les deux constantes p et q.



802